

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DE UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Prof^a. Dr^a. Renata Cristina Geromel Meneghetti - ICMC/USP

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática, que surgiu à luz de um estudo histórico-filosófico a respeito da constituição do saber matemático; abordamos uma aplicação desta proposta no processo de elaboração e desenvolvimento de materiais didáticos para o ensino de matemática; e, finalmente, analisamos, por meio de estudo de caso, a utilização em sala de aula de um desses materiais.

Palavras Chaves: proposta pedagógica, ensino-aprendizagem de matemática, estudo de caso.

Abstract

In this paper we introduce a pedagogical proposal to the teaching and learning of mathematics, that arose through a philosophical and historical study about the constitution of mathematical knowledge. We approach an application of this proposal in the process of elaboration and development of didactic materials. Finally, we analyze by case' study the utilization of one of these material in the class room.

1. A PROPOSTA: ORIGEM E FUNDAMENTO TEÓRICO

Ao analisarmos as concepções do conhecimento geral e do conhecimento matemático nas principais correntes filosóficas, de Platão (427-347 a.C.) ao século XIX¹, é possível apontar as seguintes considerações:

Filósofos e matemáticos, desde a época de Platão, nem sempre estiveram de acordo quanto à natureza do saber matemático. Antes de Kant (1724-1804), na história da filosofia da matemática é possível obter duas posições:

(I) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático inteiramente na razão. Dizemos que nesse grupo há prevalência do aspecto lógico do conhecimento.

(II) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático exclusivamente na intuição ou experiência. Dizemos que nesse grupo é privilegiado o aspecto intuitivo do conhecimento.

No primeiro grupo estão, por exemplo, o realismo Platônico, o idealismo de Descartes (1596-1650) e o racionalismo de Leibniz (1646-1716). A característica comum a essas três correntes filosóficas é a valorização, na constituição do saber matemático, da razão em detrimento da intuição sensível.

No segundo grupo podemos destacar os trabalhos de Newton (1643-1727), Locke (1621-1704), Berkeley (1685-1753) e Hume (1711-1776). Para esses filósofos a matemática está sujeita à experiência.

Uma posição intermediária aos dois grupos é possível ser verificada em Kant, para o qual todo conhecimento parte da experiência (trata-se aqui do que denominou de sintético); entretanto, o conhecimento deve tornar-se independente da experiência, pois a ciência deve ser universal e necessária (essas são as condições *a priori* do conhecimento). Assim, para esse filósofo, os juízos científicos, em particular os da matemática, são, pois, de natureza sintética e *a priori*. Entendemos, então, que há na filosofia kantiana uma tentativa de se considerar, equilibradamente, na constituição do conhecimento, ambos os aspectos: o intuitivo e o lógico.

¹ Para uma descrição mais detalhada dessas correntes filosóficas ver (Meneghetti, 2001; Meneghetti & Bicudo, 2003).

Entretanto, apesar de tal tentativa, depois de Kant a experiência é novamente posta de lado. Foi o que sucedeu também na Filosofia da Matemática, como segue.

No início do século XIX, firmam-se três correntes filosóficas que pretendem dar conta da natureza do conhecimento matemático, a saber, o logicismo, o formalismo e o intuicionismo.

O Logicismo se caracteriza pelo propósito de reduzir a matemática à lógica. O primeiro trabalho, de caráter determinado nesta direção, foi o do matemático alemão Frege (1848-1925), que pretendeu reduzir a aritmética à lógica. A continuidade deste programa deu-se com Russell (1872-1970) que apresentou uma postura mais radical, a de reduzir toda a matemática à lógica.

Quanto ao formalismo, o propósito de Hilbert (1862-1943) foi o de unir o método logicista ao método axiomático, como forma de garantir a consistência nas investigações em matemática. No cerne do intuicionismo moderno, fundado por Brouwer (1881-1966), a matemática em sua formação abstrata é considerada puramente intuitiva, e independente da lógica. Toda matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais por meio de métodos construtivos intuitivamente claros.

Essas três últimas correntes possuíam como características comuns: (i) o abandono da experiência como fonte de conhecimento; (ii) e o consenso do caráter absoluto do conhecimento matemático (Silva, 1999). O fato é que, segundo (Snapper, 1979), embora essas três correntes tenham tentado fornecer à matemática uma fundamentação sólida, todas falharam em seus propósitos, e a natureza do saber matemático passou a ser novamente questionada. Procuramos mostrar que tal crise é produto de se considerar os aspectos intuitivo e lógico sempre como excludentes e, portanto, apontamos para a importância de concebê-los como complementares no processo da constituição do conhecimento matemático, tal como ocorreu com o desenvolvimento histórico do cálculo, o qual se deu mediante a contribuição (de forma complementar) de ambas correntes filosóficas: o empirismo e o racionalismo. (Meneghetti & Bicudo, 2002)

A proposta

À luz desse estudo, defendemos a proposta de que no processo de constituição do conhecimento matemático, não é possível atribuir maior valor para o aspecto intuitivo ou para o lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes, portanto, defendemos que o intuitivo² apóia-se no lógico³ e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, tomando a forma de uma espiral, sendo que, o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo deve estar presente em cada um dos níveis dessa espiral. (Meneghetti, 2001; Meneghetti & Bicudo, 2003)

Outros Embasamentos Teóricos

Tais considerações ganham forças quando analisamos as atuais reivindicações para a Filosofia da Matemática que, entre outras colaborações, reconhecem a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático (Hersh, 1985; Lakatos, 1985; Thom, 1985).

Ademais, atualmente diversos trabalhos têm destacados aspectos que relacionam Filosofia e História da Matemática com a Educação Matemática, mostrando-nos que tais campos científicos parecem caminhar influenciando-se uns aos outros no desenvolvimento do

² Embora o termo intuitivo possa tomar diversos significados, neste trabalho esse termo está significando um dos sentidos estabelecidos por Kant, a saber, que o intuitivo é um conhecimento de apreensão imediata, sem intermediário, podendo ser de origem empírica (conhecimento empírico) ou *a priori* (conhecimento que não depende da experiência).

³ Inspirada no trabalho de Frege (1879) a lógica aqui está sendo considerada como uma linguagem puramente formal, a qual não necessita ser suplementada por qualquer razão intuitiva. Assim, entendemos que é por meio da lógica que sistematizamos, ou seja, formalizamos o conhecimento e o mesmo adquirir o caráter de necessidade e universalidade.

saber matemático (Thompson, 1984; Steiner, 1987; Fiorentini, 1995; Miguel, 1995; Meneghetti & Bicudo, 2002; Bicudo & Garnica, 2003)⁴.

Ainda no contexto da Educação Matemática, a questão do equilíbrio para os aspectos lógicos e intuitivos abordada pela proposta em questão ganha respaldo nas colocações desse último autor, o qual critica características dicotômicas e modismos na Educação Matemática, em particular na história da reforma do currículo, que oscilou entre posições polares, tais como: habilidade x entendimento, construção de estrutura x resolução de problemas. Sobre isso, o autor apresenta a seguinte citação de (Hilton, 1977):

“Será argumentado que muitas das dicotomias prevalecentes (ou seja, dizer que dois conceitos estabelecidos em oposição, um ao outro, não formam parte um do outro) são falsas; que, enquanto os dois conceitos num exame detalhado são diferentes, eles têm um envoltório essencial, e que, quando propriamente entendidos e aplicados, podem, de fato, mutuamente reforçarem-se”. (Hilton, 1977, apud Steiner 1987, p.11, trad. minha).

Percebemos ainda uma afinidade da proposta, no que se refere ao apoio do aspecto lógico no intuitivo e vice-versa (no processo de elaboração do conhecimento) com o que é posto no construtivismo social concernente aos aspectos subjetivo e objetivo do conhecimento⁵, a saber, segundo (Ernest, 1991), no processo de elaboração do conhecimento, o conhecimento subjetivo⁶ relaciona-se com o conhecimento objetivo⁷ por meio de um ciclo criativo, através do qual cada um contribui para a renovação do outro. Nesse ciclo, o conhecimento matemático subjetivo, após um minucioso exame intersubjetivo, reformulação e aceitação, seguindo a heurística de Lakatos⁸, tornar-se conhecimento objetivo. O conhecimento objetivo, por sua vez, é internalizado e reconstruído individualmente durante o aprendizado, tornando-se conhecimento subjetivo individual. Utilizando esse conhecimento, o indivíduo cria e publica novos conceitos, completando, desse modo, o ciclo.⁹

A questão dos níveis no processo de constituição do conhecimento defendidos pela proposta em questão pode também ser justificada cognitivamente com (Vygotsky, 1991). Considerando conceitos como generalizações, esse autor argumenta que à medida que o intelecto se desenvolve, velhas generalizações são substituídas por generalizações de tipos cada vez mais elevadas – processo que leva à formação dos ‘verdadeiros conceitos’. A aquisição de conceitos novos e mais elevados transforma o significado dos conceitos inferiores. Uma vez que já tenha sido incorporada em seu pensamento, a nova estrutura conceitual gradualmente expande os conceitos mais antigos, à medida que estes se inserem nas operações intelectuais de tipo mais elevado. (Vygotsky, 1991, pp. 71,72 e 95).

⁴ Em Menghetti (2003b) o leitor encontrará uma descrição dos trabalhos aqui mencionados com respeito a possíveis relações entre Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática.

⁵ É importante observar que os aspectos subjetivo e objetivo (SO) do construtivismo social são distintos dos aspectos intuitivos e lógicos (IL) referidos nesse trabalho. Entretanto, entendo que há alguns pontos de intersecções entre SO e IL, visto que, o conhecimento intuitivo é uma criação pessoal do indivíduo e, portanto, é subjetivo; e o conhecimento objetivo é um conhecimento lógico.

⁶ Referente à criação pessoal do indivíduo.

⁷ No sentido de ser socialmente aceito.

⁸ Por um processo de conjecturas e refutação de assuntos ainda indeterminados vai-se buscando princípios básicos como resultado de especulações audaciosas que tem sobrevivido a testes e críticas severas. (Lakatos, 1985).

⁹ Para esse autor há dois aspectos chaves na construção de conhecimentos subjetivos, a saber: (a) uma construção ativa do conhecimento, normalmente de conceitos e hipóteses, com base nas experiências e conceitos prévios do indivíduo. Tal construção proporciona uma base para sua compreensão e serve como guia para as ações futuras; (b) um papel essencial desempenhado pela experiência na interação com os mundos físico e social. A experiência proporciona um conflito entre os resultados pretendidos e percebidos, o que leva a uma reestruturação do conhecimento, para proporcionar seu ajuste com a experiência.

2. ELABORAÇÃO E ESTRUTURAÇÃO DO MATERIAL

Em 2002, vinculados a um projeto mais amplo¹⁰, buscamos confeccionar kits experimentais para o ensino das ciências da natureza e da matemática para compor o acervo da experimentoteca do CDCC/USP(Centro de Desenvolvimento Cultural e Científico. Nessa ocasião, formamos um grupo de pesquisa constituído de professores de matemática do ensino fundamental e médio, e de alunos e professores de cursos de licenciatura em matemática do ICMC-USP e do departamento de matemática da UFSCar (Universidade Federal de São Carlos). O passo inicial para o trabalho desse grupo consistiu no levantamento, junto aos professores da rede (integrantes do grupo), de temas (que apresentavam maiores dificuldades de ensino). Números Inteiros, Números Racionais e Geometria, foram os temas levantados nessa fase inicial. Buscamos desenvolver os materiais por meio de atividades experimentais ou em forma de jogos, que proporcionassem a construção por parte dos alunos dos conceitos envolvidos, tais atividades foram estruturadas na proposta ora defendida. Desta forma, seguindo uma abordagem em espiral, desenvolveu-se os temas segundo três níveis: elaboração, consolidação e expansão de conceitos¹¹. Em cada um desses níveis buscou-se pelo equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento. Entretanto, entende-se que se trata de materiais abertos, pois se concebe que o conhecimento é algo em constante evolução e adaptação, sendo que, no que se refere aos níveis de desenvolvimento do tema, julgamos o primeiro como essencial e os demais como elaborações cada vez mais profundas¹².

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Fase da Elaboração do material

É sabido, mediante experiência e resultados científicos (Vygotsky, 1991, p.72), que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero, o mesmo pode se dizer com respeito à introdução de propostas alternativas, de âmbito geral ou tecnológico, sem uma fundamentação teórica/metodológica adequada. Muitas vezes o uso de recursos didáticos não familiares ao educador provoca resistências para sua adoção. Sem compreender a concepção de ensino-aprendizagem e identificar a ideologia subjacente às novas propostas curriculares, o professor não constrói significados que permitem sua identificação com seus pressupostos e, portanto, dificilmente as novas orientações modificam sua prática docente. Uma maneira de minimizar esse fator de resistência para a adoção e difusão de propostas inovadoras na educação é envolver os professores na fase de concepção do projeto, estratégia que utilizamos¹³, o que acreditamos possa contribuir para possibilitar uma maior identificação dos professores com os materiais didáticos elaborados, bem como nos proporcionar um vínculo, mesmo que indireto, com a problemática do ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula.

Vale a pena, nesse momento, apresentar o seguinte relato de uma professora integrante do grupo:

¹⁰Projeto “Instrumentação para o ensino interdisciplinar das ciências da natureza e da Matemática”, mais amplo, desenvolvido no CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural de São Carlos)/ CNPq. Parte de matemática teve o nome das coordenadoras a autora desse trabalho.

¹¹ Dessas atividades algumas foram selecionadas para serem reproduzidas e comporem o acervo da experimentoteca do CDCC -para empréstimo aos professores do ensino fundamental e médio da rede pública e particular.. Há também duas cópias do material completo disponíveis nos Laboratórios de Ensino do ICMC-USP e no da UFSCar (departamento de matemática).

¹² Isso implica que não se precisa necessariamente trabalhar os três níveis de uma só vez e que também é possível desenvolver outros níveis além dos sugeridos.

¹³ Vide descrição da composição do grupo na página anterior.

“Foi com muita alegria que aceitei o convite para trabalhar nesse projeto, que vem ao encontro de uma metodologia de ensino que gosto e acredito, a construção do conhecimento pelo próprio aluno, através de atividades propostas e dirigidas pelo professor. Qual o objetivo de construir materiais educacionais, senão o de motivar o aluno para a aprendizagem, e tornar os conteúdos matemáticos mais significativos? Essa não é uma tarefa muito fácil. Nós, professores, temos muito que pesquisar e aprender para podermos aplicar atividades que alcancem esse objetivo. Para isso é necessário muito tempo de pesquisa, acesso a diversos materiais, tempo de construção dos jogos, gasto com esses materiais, e etc. Tendo sempre em mente as dificuldades encontradas por nós, professores, principalmente os da rede estadual, em sala de aula, os materiais até então propostos são em geral simples para serem aplicados, e contemplam as maiores dificuldades dos alunos, sejam eles do ensino fundamental ou médio”.¹⁴

Fase da aplicação do material¹⁵

Nessa fase pretendíamos analisar a estruturação do material didático que teve como suporte a proposta pedagógica aqui defendida. Para uma intervenção em sala de aula escolhemos o material de números racionais, pois julgávamos estar pronto para aplicação.¹⁶ A intervenção se deu numa 5ª série do segundo ciclo do ensino básico de uma escola pública na cidade de São Carlos (SP), na sala de aula de uma das professoras que havia participado da fase de elaboração dos materiais, que concordou em nos ceder uma turma de alunos para que realizássemos o estudo.

Fizemos uma pesquisa qualitativa através de um estudo de caso (Pádua, 1996, p. 71) e durante a intervenção foi adotada uma abordagem construtivista social, utilizando-se de trabalho em grupo e contrato didático. Esses pontos serão tratados com mais detalhes no que segue. O trabalho de campo teve duração de seis semanas, num total de 23 horas/aulas e seguiu as seguintes etapas: (a) realização de um diagnóstico inicial para verificar os conhecimentos prévios dos alunos com respeito ao conteúdo a ser trabalhado; (b) aplicação do material; (c) efetuação de um novo diagnóstico e (d) avaliação da aplicação do material.

A aplicação do material se deu vinculada aos estágios supervisionados da disciplina “Prática de Ensino de Matemática”, sob a responsabilidade da autora deste artigo; foi aplicado pelo estagiário A¹⁷ (que vamos denominar professor - aplicador), com acompanhamento de dois outros estagiários¹⁸, os quais desempenharam o papel de observadores participantes (Lüdke & André, 2003, p. 28) e colaboraram com a coleta (registro) dos dados. Os dados foram analisados

¹⁴Depoimento da professora Liza apresentado em 19.09.02. A professora em questão leciona em uma escola do ensino médio da rede pública e também no ensino fundamental de uma cooperativa educacional, ambas localizadas em São Carlos.

¹⁵ Uma versão preliminar da análise da aplicação desse material (Meneghetti & Asis, 2005) foi apresentada no V CIBEM.

¹⁶ Visto que esse material havia sido bastante discutido pelo grupo, tinha sido aplicado em sala de aula por estagiários de prática de ensino no ano anterior (aplicação piloto) e, portanto, já havia passado por algumas correções.

¹⁷ A atividade que se deu vinculado ao projeto de iniciação científica: O Construtivismo na Educação Matemática: em busca de compreensão- financiado pela FAPESP com dois anos de duração, sob a orientação da autora deste trabalho. Ademais esse estagiário era aluno do curso de Prática de Ensino e integrante do grupo que elaborou os materiais.

¹⁸ Estagiários R e H.

por meio dos diagnósticos (inicial e final) dos alunos, dos relatórios elaborados pelos estagiários, dos depoimentos dos alunos e do professor-aplicador.

Na primeira aula estabelecemos um contrato didático¹⁹, enfocando pontos importantes sobre a forma como iríamos trabalhar, contendo alguns parâmetros que norteariam o desenvolvimento das aulas (como a disposição física da sala, os critérios de divisão da sala em grupos, os sistemas de avaliação, etc.).

Nas duas aulas seguintes, os alunos participaram de uma avaliação diagnóstica inicial, visto que, segundo (Mauri in Coll et al., 2003, p. 97), “é dos conhecimentos prévios dos alunos que dependem as relações que são possíveis estabelecer para atribuir significado à nova informação proposta”.

Essa avaliação continha situações - problemas elaboradas com a preocupação de não conterem termos técnicos ou algoritmos predeterminados de resolução, mas questões do cotidiano dos alunos, que exploravam intuitivamente conceitos - chaves do estudo dos números racionais, como a representação de frações, equivalência entre frações, operações entre números inteiros e frações e entre duas frações²⁰.

No início da avaliação, os alunos mantiveram-se bastante passivos: liam as questões e ficavam inertes. Percebendo isso, o professor-aplicador incentivou-os a solicitarem sua ajuda, e passou a percorrer a sala atendendo aos seus questionamentos, mantendo a postura de não lhes oferecer respostas prontas, mas fazendo-os refletir sobre suas próprias dúvidas; tal conduta fora adotada durante todo o processo de intervenção.

Após a correção da avaliação diagnóstica, pode-se constatar que a turma apresentava uma grande deficiência em trabalhar com números racionais; tinham dificuldades inclusive para interpretar as próprias questões da avaliação. A média alcançada pelos alunos nessa avaliação foi 4,3.

Durante a fase de aplicação do material, os alunos foram organizados em grupos - de no máximo cinco integrantes - cuja composição não era fixa, podendo haver permuta entre seus membros, segundo a vontade dos próprios alunos.²¹

Com respeito ao material foram aplicadas atividades correspondentes à fase de “introdução” e “consolidação” de conceitos. Referente a esse tópico, a primeira fase é constituída por quatro kits pedagógicos, abordando a idéia intuitiva de fração, conceitos de equivalência entre frações e as operações fundamentais entre frações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Esses kits são compostos por atividades em que os alunos têm o apoio de materiais manipuláveis. Durante essa fase, os alunos basicamente trabalharam com atividades experimentais ou lúdicas.

Durante toda a etapa de introdução dos conceitos, o professor manteve a postura de incentivar a participação dos alunos, dirigindo perguntas a eles e aproveitando suas respostas para direcionar o desenvolvimento das atividades.

A formalização (fechamento) dessa fase se deu por meio de um trabalho em conjunto entre o professor e os alunos, mediante uma atividade na qual o professor destacou no quadro negro os principais conceitos abordados. A intenção desse fechamento foi promover, nesse nível, o que é defendido na proposta, a saber, um equilíbrio entre os aspectos intuitivos e lógicos do conhecimento e também de preparar os alunos para as aulas subsequentes (fase de consolidação de conceitos), em que teriam de participar de jogos e atividades envolvendo os conceitos trabalhados. Essa etapa de introdução de conceitos teve uma duração de 9 horas/aulas.

¹⁹ Utilizamos o termo contrato didático no sentido empregado por (Brousseau, 1988), mediante o qual regras pertinentes ao sistema constituído pelo trio professor, aluno, conhecimento são estabelecidas (Pais, 2001).

²⁰ Por exemplo, uma das questões foi a seguinte: “Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que **todos comeram a mesma quantidade**. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza juntas comeram? E quanto do pacote os três juntos comeram?”.

²¹ Interessante observarmos que esse critério de distribuição de grupo originou-se da negociação do professor-aplicador com os alunos, visto que, no contrato didático, inicialmente estava previsto a divisão dos grupos por desempenho (medido por meio do diagnóstico inicial).

Seguindo a estruturação do material, iniciamos a fase de consolidação de conceitos. Nessa etapa, os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar os conceitos vistos na fase precedente sob uma abordagem mais profunda, através da participação em jogos em que as chances de vitória dependiam da utilização dos conceitos estudados na fase anterior. Esse seria, então, um outro nível de trabalho, no qual, de acordo com a proposta que estrutura o material, deveria haver novamente um equilíbrio entre o intuitivo e o lógico. Nessa etapa foram trabalhados 6 kits pedagógicos, englobando jogos como dominó, bingo, jogo da memória, jogo do mico e jogo de cartas. Estes jogos exploravam os conceitos de representação numérica e gráfica de frações, ordenação entre frações e equivalência entre frações.

Essa etapa de consolidação teve uma duração de 7 horas/aulas e também foi encerrada como a fase anterior, através de um levantamento e discussão dos principais pontos e conceitos abordados.

Terminada a etapa de aplicação do material, promovemos um diagnóstico final da turma. Os alunos resolveram as mesmas questões (situações problemas) com que haviam trabalhado na avaliação diagnóstica inicial e foram utilizados os mesmos critérios de correção para as duas avaliações. Desta vez percebemos que os alunos expressaram melhor suas respostas, fizeram mais desenhos, e responderam com mais segurança às questões. Eles conseguiram efetuar adições, multiplicações, simplificações e operações com frações; atitudes que dificilmente tiveram na primeira avaliação. A média alcançada pela turma nesse último diagnóstico foi 7,0.

No último dia de aula, os alunos responderam a uma folha de sugestões com o intuito de avaliar o material com que haviam trabalhado. Nela pedia-se apontassem as atividades de que mais gostaram e aquelas de que menos gostaram e que apresentassem sugestões. Nesse momento, todos os alunos aproveitaram a oportunidade para expressar suas opiniões.

ANÁLISE DA APLICAÇÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegamos à conclusão de que o diagnóstico inicial dos alunos, realizado nas primeiras aulas, foi de grande importância em nosso trabalho, pois foi a partir dele que pudemos identificar as maiores dificuldades da turma. Observamos, por exemplo que, dos 35 alunos que participaram dessa avaliação, 17²² apresentavam dificuldades consideráveis com os conceitos relativos às frações ou com a notação fracionária ou com ambos os aspectos. A título de ilustração, apresentaremos alguns fragmentos retirados dessas avaliações.

Com respeito a dificuldades conceituais, vejamos o caso a seguir:

5) Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que todos comeram a mesma quantidade. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza juntas comeram? E quanto do pacote os três juntos comeram?

cada um comeu $\frac{1}{3}$, e as duas juntas comeram $\frac{2}{3}$, e os três juntos comeram $\frac{3}{9}$.

Nesse caso percebe-se que o aluno utiliza a notação fracionária, porém o conceito de soma entre frações parece não estar bem compreendido (o aluno efetua a soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, adicionando numerador com numerador e o denominador com denominador e não consegue enxergar que o resultado $\frac{2}{6}$ é equivalente às parcelas $\frac{1}{3}$; o mesmo raciocínio se repete no caso de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, que o aluno responde ser $\frac{3}{9}$).

As dificuldades com notação podem ser ilustradas com o seguinte exemplo:

²² Especificamente, 9 alunos apresentaram grandes dificuldades em utilizar a notação fracionária, enquanto 13 demonstraram deficiências conceituais e 5 possuíam dificuldades com ambos aspectos.

1) Uma torta de trango deve ser repartida igualmente entre 5 crianças. Como você representaria o que cada criança irá receber? Indique todas as possíveis formas de fazer essa representação.



$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 1} \\ 0 \\ \hline \end{array}$$

Pr. Cada um recebe
1 pedaço

Nesse exemplo, podemos observar que o aluno, apesar de ter alguma noção com respeito ao conceito (no sentido de que ele, ao menos, sabia que deveria dividir o material em 5 partes e tomar uma delas), tentou fazer isto, dividindo a princípio a 'torta' em 4 partes e depois tomou uma dessas partes e a dividiu em duas (provavelmente por não ter tido um critério inicial para efetuar a divisão em 5 partes iguais). Entretanto, percebe-se que esse aluno não soube utilizar a notação fracionária corretamente para representar aquilo que ele desejava.

Finalmente, apresentamos abaixo um caso que caracteriza um problema de dificuldade conceitual e notacional, ao mesmo tempo:

5) Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que todos comeram a mesma quantidade. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza juntas comeram? E quanto do pacote os três juntos comeram?

Ana + Liza comeram metade do pacote.
Miguel comeu o resto

Esse aluno além de não saber representar suas idéias utilizando notações fracionárias²³, também apresenta problemas conceituais (para ele $1/3 + 1/3$ corresponde à metade do pacote).

Assim, ao avaliarmos a aplicação do material percebemos que, o diagnóstico inicial foi fundamental para a orientação de nosso trabalho; pois, sem ele, correríamos o risco de trabalhar os conteúdos numa linguagem, ou nível, de difícil compreensão para os alunos;

Observamos também que a disposição dos alunos em grupos foi de grande importância no que diz respeito às modificações de seus esquemas de conhecimento²⁴ e atribuição de significados. Pudemos ver que, muitas vezes, os integrantes de cada grupo discutiam e se ajudavam para poderem completar as tarefas, criando assim desequilíbrios e posteriores re-equilíbrios em suas estruturas cognitivas²⁵, permitindo, portanto, trabalhar a Zona de Desenvolvimento Proximal²⁶. Outro fato ressaltado pelo professor-aplicador é que o trabalho em grupo favoreceu a relação professor-aluno: "(...) a divisão da sala em grupos possibilitou-me

²³Observamos que em todas as questões solicitadas nessa avaliação, esse aluno apresentou suas respostas sem utilização de notação fracionária.

²⁴"Entendemos por esquemas de conhecimento a representação que uma pessoa tem, em um determinado momento, sobre uma parcela da realidade" (Mauri, 2003, p. 96).

²⁵Segundo (Mauri, 2003, p. 100), esses desequilíbrios podem ser gerados no decorrer da interação entre colegas.

²⁶Zona de discrepância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial.(Vygotsky, 1991).

percorrê-los e ir sanando suas dúvidas, tendo tempo para trabalhá-las com os alunos. Acredito que essa divisão possibilitou uma enorme e considerável aproximação com os alunos.”²⁷

Após nossa intervenção, percebemos que os conteúdos trabalhados com materiais de fácil manipulação, ou visualização, foram mais bem compreendidos pelos alunos do que os demais. Segundo o professor - aplicador, “(...) os alunos não entenderam muito bem a divisão entre frações, talvez devido à falta de exemplos práticos e concretos, mas entenderam muito bem a divisão de frações por números inteiros”²⁸. Esse fato parece ressaltar a importância do aspecto intuitivo na estruturação do conhecimento. Vale notar que essas duas atividades fazem parte do nível de introdução de conceitos, sendo que a divisão de frações por inteiros foi trabalhada com o apoio um material concreto, com o qual os alunos podiam realizar as divisões através de manipulações, enquanto a divisão entre duas frações foi trabalhada sem o auxílio de um material que proporcionasse tão boa visualização, exigindo do professor um trabalho onde se estabeleça uma ponte entre os aspectos intuitivo e lógico do conhecimento.

Dessa experiência, o professor-aplicador relata como positivo na estruturação do material, o fato dele oferecer aos estudantes oportunidades diferentes para trabalharem os conceitos envolvidos, uma vez que um mesmo conceito é retomado em diversos níveis e sob novas abordagens.

Um dos pontos observados com respeito ao processo de intervenção foi o de que se estabeleceu em sala-de-aula um clima favorável ao surgimento de situações de ensino-aprendizagem, o que, a nosso ver, se deu principalmente à adoção por parte do professor-aplicador de uma postura na linha construtivista.

Quanto à aprendizagem dos alunos, percebeu-se que houve um progresso nessa direção. Pudemos observar isso comparando o desempenho que os alunos tiveram na avaliação diagnóstica final (média 7,0) com o da avaliação inicial (média 4,3) e também por meio da avaliação continuada, visto que o professor relata que os alunos passaram a efetuar adições, multiplicações, simplificações de frações, atitudes que dificilmente foram encontradas no diagnóstico inicial. Abaixo temos uma demonstração de operações (subtração e adição de frações com mesmo denominador) que uma aluna não conseguiu realizar na avaliação diagnóstica inicial, mas conseguiu efetuar na avaliação diagnóstica final, ou seja, após a intervenção:

9) Durante o café da manhã, Dudu comeu $\frac{1}{2}$ (metade) de um pão com geléia e $\frac{1}{3}$ (um terço) de outro pão com manteiga. Quanto de pão Dudu comeu no café da manhã?

Resolução no diagnóstico inicial



Não lembra

Resolução no diagnóstico final

²⁷ R
²⁸ C

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

notações de aula.

Essa constatação de progresso, no que se refere à aprendizagem dos alunos, também foi apontada nos depoimentos dos próprios alunos (folhas de sugestões -no último dia de aula):

“Eu gostei muito das brincadeiras e do material de vocês (...) são muito bem feitos (...) eu adorei uma maneira melhor de entender”. (Caio)

“Não tem como não gostar das atividades. O que mais gostei foi que a turma aprendeu mais sobre frações”. (Lucas)

Ademais, ficou evidente também a importância da postura adotada pelo professor-aplicador, a qual estava em consonância com o suporte teórico em que o material fora estruturado²⁹, como ele próprio relatou em entrevista realizada após aplicação:

“(...) penso que, da forma como foi estruturado, o material faz-se uma rica fonte de atividades com as quais, mantendo uma postura na linha construtivista, o professor pode levar/orientar seus educandos à construção dos conceitos matemáticos envolvidos.”

Assim, chegamos à conclusão de que a proposta metodológica que estrutura o material, possibilitou que trabalhássemos os aspectos subjetivo e objetivo do conhecimento (como posto na linha do construtivismo social) e mostrou-se eficiente do ponto de vista didático-pedagógico por proporcionar a construção dos conceitos envolvidos.

BIBLIOGRAFIA

BICUDO, M. AP. & GARNICA, A.V. M. *A Filosofia da Matemática e sua constituição multifacetada: apontamentos sobre algumas de suas questões geradoras*, in Bicudo, Maria Ap. V. (org.) *Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimento*, Brasília: Plano Editora, 2003.

BROUSSEAU, G. *Le Contrat Didactique: le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n° 3, 1988.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*, Bristol: The Farmer Press, 1991.

FIORENTINI, D. *Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil*, Revista Zetetiké, ano 3, n.4, 1995.

FREGE, G.: *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, 1879 In HEIJENOORT, V.: *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1971, pp. 1-82.

HERSH, R. *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics* In: Tymoczko New Directions in the Philosophy of Mathematics” Birkhäuser, 1985.

KILPATRICK, J. *Staking Claims Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 3, n.4, pp.21-42, 1995.

LAKATOS, I. *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics* In: Tymoczko New Directions in the Philosophy of Mathematics” Birkhäuser, 1985.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 2003.

MAURI, T. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares? in Coll, C.; Martin, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Sole, I. e Zabala, A. *O Construtivismo na sala-de-aula*, São Paulo: Editora Ática. 2003 (cap.4)

²⁹ Lembramos aqui que (Kilpatrick, 1995) nos alerta a respeito da necessidade de haver, de fato, uma harmonia entre os vários componentes (etapas) de um estudo.

- MENEGHETTI, R.C.G., *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: Uma análise a luz da história e da filosofia da matemática*, tese de doutorado em Educação Matemática, orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo, UNESP- IGCE- Rio Claro/SP, 2001.
- _____. *Influências da Filosofia da Matemática na Filosofia da Educação Matemática*, in anais (cd-rom) XI CIAEM- Conferencia Interamericana de Edcación Matemática- FURB- Universidade Regional de Blumenau- de 13 a 17 de julho de 2003b- Blumenau- SC.
- MENEGHETTI, R.C.G. & ASIS, A.C. “ Atividades Lúdicas e Experimentais para o ensino de frações incorporadas a uma proposta pedagógica Actas (cd-rom) V CIBEM Congresso Ibero-americano de Educação Matemática), Faculdade de Ciência da Universidade de Porto- Portugal, 2005.
- MENEGHETTI, R.C.G. & BICUDO, I. *O que a História do Desenvolvimento do Cálculo pode nos ensinar quanto questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos*, REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: AN INTERNATIONAL JOURNAL on the History of Matchematics (ISSN 1519-955X), no 3, abril de 2002, pp. 103-117.
- _____. *Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática*, BOLEMA- Boletim de Educação Matemática(ISSN 0103- 636X), no 19- ano 16- 2003, pp. 58-72.
- MIGUEL, A. *A Constituição do paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico em Educação Matemática*, Revista Zetetiké, ano3/ n.3, 1995, pp.7-39.
- PÁDUA, E.M.M. de. *Metodologia da Pesquisa: abordagem teórico-prática*, Campinas, SP: Papirus, 1996.
- PAIS, L.C. *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- SILVA, J.J. *Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática* In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas- São Paulo, editora UNESP, 1999, pp. 45-58.
- SNAPPER, E. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism. *Math. Mag.* vol. 52, n.4, September 1979, pp.207-216.
- STEINER, H.J. *Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education*, For the Learning of Mathematics 7, 1 (February 1987), FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada, 1987.
- THOM, R. *Modern Mathematics: an educational and philosophic error?* In: Tymoczko New Directions in the Philosophy of Mathematics” Birkhäuser, 1985.
- THOMPSON, A.G. *The Relationship of Teachers’ Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to instructional Practice*, Education Studies in Mathematics 15, pp. 105-107, 1984.
- VYGOTSKY, L.S. *Pensamento e Linguagem*, Editora Martins Fontes, São Paulo-SP, 1991.

Renata Cristina Geromel Meneghetti E-mail: rcgm@icmc.usp.br