

# MATEMÁTICA E FENOMENOLOGIA

Jairo José da Silva

Platão e Aristóteles legaram-nos duas perspectivas modelares para a compreensão da natureza dos objetos matemáticos, e nosso modo de acesso a eles. Na de Platão a figura geométrica e o número são vistos como formas puras a que ascendemos por meio exclusivo da razão, sem nenhum concurso dos sentidos. Já Aristóteles não acreditava na independência das formas matemáticas e preferia vê-las simplesmente como aspectos do mundo real, a que temos acesso por um processo de abstração necessariamente fundado na experiência.

Para Platão, o número 7, por exemplo, é uma forma ideal pura, una e indivisível, uma particularização da idéia de multiplicidade, um ente da razão, da qual participa qualquer coleção de sete unidades indiferenciadas (as múltiplas e indistintas versões do sete matemático, todas compartilhando a mesma idéia de quantidade). As coleções reais de sete objetos quaisquer, por sua vez, participam tanto do sete matemático - uma vez que coincidem com ele por abstração, desconsiderada a natureza particular dos objetos coletados - quanto da forma ideal - uma vez que instancia essa quantidade determinada considerada idealmente. O sete ideal, esse existe independentemente e, de certo modo, anteriormente às coleções de sete objetos.

Aristóteles por sua vez acreditava que as coleções reais de sete objetos são tudo o que há, mas que podemos considerá-las em seu aspecto puramente quantitativo. O número sete nada mais seria que essas coleções assim consideradas. Se quiséssemos poderíamos dizer que o número sete, visto como um objeto, é o aspecto comum das coleções de sete objetos. A propósito, Frege lançou mão deste artifício para definir os números cardinais (ainda que para Frege esses números tenham existência independente).

São fundamentalmente três as grandes questões da filosofia da matemática: 1) o que são os objetos matemáticos; 2) como podemos conhecê-los e 3) como é possível que a matemática seja aplicável ao mundo empírico? Platão responde-as assim: 1) os objetos matemáticos são entidades ideais independentes; 2) que conhecemos pela razão e 3) e cujas relações recíprocas são imperfeitamente reproduzidas no mundo empírico (Platão dizia que este apenas participa daquele). E Aristóteles assim: 1) os objetos matemáticos são apenas modos de considerar objetos empíricos; 2) que conhecemos por intermédio de uma certa especialização da atenção e 3) cuja participação no mundo empírico não oferece nenhum problema, uma vez que nada mais são que aspectos dele.

A perspectiva platônica é o modelo de todas as versões realistas da filosofia da matemática, reconhecíveis por distinguirem nitidamente o mundo matemático do mundo empírico. A aristotélica, por sua vez, é a versão prototípica das filosofias empiristas da matemática, caracterizadas por negarem-lhe um domínio próprio supra-empírico. O calcanhar de Aquiles das filosofia realistas é o problema do acesso: como percebemos, com a razão apenas, o mundo matemático, sem o concurso dos sentidos? O empirismo, por seu lado, tropeça na questão epistemológica: se os juízos matemáticos são afinal juízos sobre o mundo empírico, ainda que considerado por um aspecto particular, por que eles não estão sujeitos quanto à justificação - como de fato não estão - ao testemunho dos sentidos?

Vejamos como Husserl trata essas questões. O ambiente filosófico europeu no início de sua carreira levava a sério uma variante muito particular do empirismo, o psicologismo. Os psicologistas acreditavam, entre outras coisas, que a lógica era nada mais que a teoria do modo como nós de fato pensamos, ou seja, a teoria geral dos aspectos formais dos atos reais de julgamento. Já os objetos matemáticos eram vistos como objetos mentais de um certo tipo e o problema do acesso tratável por uma psicologia da abstração matemática (entendida como um modo de especialização da atenção). Tanto Husserl quanto Frege, o fundador da moderna Lógica Matemática e o pioneiro da chamada Filosofia Analítica, criticaram impiedosamente o psicologismo. Eles viram nas teses psicologistas uma distorção da natureza da lógica e da matemática, que são, segundo eles, ciências objetivas que não podem ser reduzidas à psicologia de certas vivências mentais.

Mas se Frege enveredou por sendas realistas ignorando o problema do acesso, Husserl permaneceu profundamente perturbado por esta dicotomia: por um lado o mundo ideal da lógica

e da matemática, por outro os atos reais de julgamento e as vivências mentais de natureza matemática. Parecia-lhe difícil ignorar o problema do acesso. Como ligar o pensamento subjetivo com a realidade objetiva? Para Frege o ato de pensar simplesmente capta um conteúdo objetivo de pensamento (um *Gedanke*). Quando pensamos que  $5 + 7 = 12$ , por exemplo, nós simplesmente, de algum modo, apenas captamos uma verdade universal, precisamente que  $5 + 7 = 12$ . Essa relação, ela mesma, independe de nossos juízos. Husserl, por seu lado, ainda que reconhecendo a validade objetiva dessa identidade, não a via independentemente de atos concretos de contagem. De alguma forma as identidades numéricas objetivas e os atos de contagem estariam relacionados. A objetividade da lógica e da matemática deveria estar de algum modo fundada em vivências mentais reais. Por mais contraditória que esse tese possa parecer, Husserl acreditava que não haveria outra forma de considerar a objetividade ideal senão por remetimento a uma subjetividade.

Seu primeiro trabalho propriamente filosófico publicado foi uma extensão de sua tese de venia legendi, intitulado *Filosofia da Aritmética* (PA - 1891) (que estende a tese *Sobre o Conceito de Número* (1887)). Nele Husserl explicita, em primeiro lugar, os mecanismos de intuição numérica, entendida então como uma psicologia da percepção matemática. Mas na segunda parte desse trabalho o problema central é outro, a justificação epistemológica do simbolismo matemático independentemente da intuição. O problema passa a ser este: como podemos estar seguros que a manipulação aritmética simbólica correta fornece-nos efetivamente verdades conceituais da aritmética? O modo de justificação que Husserl lança mão nesse trabalho não pode, porém, ser estendido para a matemática como um todo. Em particular, Husserl não pode aplicá-lo a formas mais gerais da aritmética (dos números inteiros, racionais, reais, e complexos). Além disso a matemática puramente formal cai completamente fora da alçada da estratégia da *Filosofia da Aritmética*.

Duas versões de matemática apresentavam-se a Husserl, uma intuitiva, outra puramente formal. E cada uma delas com seus problemas específicos. Era preciso especificar os mecanismos da intuição matemática, pela qual criar-se-ia o elo de ligação entre a objetividade matemática e as vivências matemáticas subjetivas. E, por outro lado, justificar a matemática puramente formal, determinar seus objetos e seu status epistemológico. Ambas as tarefas são levadas a cabo no segundo grande trabalho de Husserl as *Investigações Lógicas* (LU) de 1900-01. Essa obra apresenta tanto uma resposta ao problema de acesso, através de uma teoria da intuição matemática, quanto uma resposta ao problema da matemática puramente simbólica.

Uma parte substancial da matemática, mesmo em suas áreas mais elementares, não é acessível a uma representação intuitiva. Podemos, por exemplo, representar-nos números pequenos como coleções de mônadas indiferenciadas, mas não podemos fazer o mesmo com números relativamente grandes. Podemos verificar intuitivamente a identidade  $5 + 7 = 12$ , por exemplo, por contagem, mas não podemos fazer isso com a identidade  $56\,783 + 93\,758 = 150\,541$ . Para a verificação dessa última equação precisamos lançar mão de procedimentos algorítmicos. Em PA Husserl justifica esses procedimentos mostrando que existe um paralelismo perfeito entre as operações simbólicas entre numerais e as operações entre conceitos numéricos. Mas o problema mais grave é o de uma matemática simbólica em que os símbolos, contrariamente ao numerais, não tem uma denotação determinada. Como justificá-la?

O tratamento da intuição matemática nas *Investigações* não difere substancialmente daquele dado à intuição numérica na *Filosofia da Aritmética*. Nessa os números passíveis de o ser são adequadamente intuídos por abstração e identificação a partir de coleções de objetos efetivamente dadas ou apenas imaginadas; sendo entendida a abstração como um processo mental de mudança do foco da atenção, que desvia-se da natureza específica dos objetos coletados para concentrar-se na forma quantitativa das coleções. A identificação é também ela entendida como um processo mental, cuja tarefa é tornar indistinguíveis as coleções equinúmeras.

Há, além dessas, outras operações mentais envolvidas na intuição matemática. Em particular a idealização, em que formas imperfeitas, como figuras geométricas reais, são idealizadas como satisfazendo perfeitamente a determinadas relações matemáticas. O círculo matemático, por exemplo, é uma idealização das figuras mais ou menos circulares do mundo real, na medida em que consideramos nele apenas aquelas propriedades que estão contidas na

idéia de um locus de pontos perfeitamente equidistantes de um ponto central. O círculo matemático, como figura ideal, é o ponto limite da série dos aperfeiçoamentos a que podemos submeter círculos reais.

Pode-se argumentar que em PA essas operações mentais incidem sobre representações, e que tem portanto uma orientação psicologista. Mas nas Investigações Husserl é claro, não se trata mais de uma psicologia, mas de uma fenomenologia da intuição matemática. O foco não está mais nas vivências mentais de um sujeito empírico, mas nas vivências intencionais de um sujeito puro. A essas vivência correspondem evidentemente certas operações lógicas, que não incidem nem sobre os objetos em si, nem sobre nossas representações, mas nos modos de tratá-los.

Nas Investigações, além disso, estende-se o tratamento da intuição matemática para além dos limites da aritmética. Não apenas números mas quaisquer objetos matemáticos, incluídas as multiplicidades matemáticas, são, em princípio, passíveis de intuição adequada. O processo é fundamentalmente o mesmo: abstração formal - em que a forma matemática de um objeto exemplar é abstraída, i.e. considerada independentemente de seu suporte material com um objeto em si, idealização - em que a forma abstraída é pensada exclusivamente segundo sua caracterização matemática (que captaria, digamos, seu eidos próprio), e identificação - em que formas apenas numericamente distintas são identificadas como a mesma forma.

Mas há pelo menos duas maneiras de se entender a intuição matemática, como uma criação, ou como uma apropriação. Podemos ver nesses procedimentos intuitivos tanto uma série de modos pelos quais a consciência cria objetos de um certo tipo, quanto seqüências de procedimentos pelos quais ela se dá conta da existência desses objetos. Nas Investigações a orientação é mais realista, isto é, entende-se que a consciência não cria, mas apenas percebe objetos matemáticos preexistentes. Já a partir de *Idéias* (1913), na virada transcendental, Husserl recusa-se a tomar esta ou aquela posição. Descrições de vivências são descrições de experiências em que algo nos é dado, e só pode ser dados dessa forma, independentemente do status ontológico disso que nos é dado. A *époché* implica numa recusa em tomar partido em questões ontológicas. Assim, a teoria husserliana da intuição matemática serve tanto ao realista, solucionando o problema do acesso, quanto ao empirista, solucionando o problema da constituição de um domínio ideal específico da matemática.

A questão da matemática puramente simbólica tem nas Investigações um tratamento definitivo. Se em PA a manipulação simbólica sem intuição era apenas um artifício, ainda que indispensável do ponto de vista prático, nas Investigações adquire uma outra dimensão. Para compreendê-la é preciso mencionar um conceito central no tratamento husserliano da *Lógica Pura*, o de ontologia formal. Por isso Husserl entende o estudo das formas pelas quais objetos quaisquer podem ser-nos dados na experiência, consideradas em si apenas como formas de algo. A modalidade da formulação acima é importante. Husserl não se restringe às formas dos objetos efetivamente existentes, mas de objetos simplesmente possíveis. Pois bem, para Husserl a matemática puramente simbólica é nada mais, ou menos, que uma matemática puramente formal. Cabe-lhe o estudo de certas formas objetivas possíveis, sendo portanto parte constitutiva da ontologia formal.

Há um evidente componente platônico nessa solução do problema da natureza da matemática. Tanto para Husserl quanto para Platão a matemática refere-se a formas ideais. Mas se para Platão essas formas têm independência ontológica, para Husserl não necessariamente. Podemos vê-las assim se assim quisermos, mas podemos também vê-las, como faria Aristóteles, como simples aspectos do mundo real, dependentes dele. Além disso, Husserl abre a possibilidades de que essas formas sejam simplesmente criadas por nós para dar conta da diversidade da experiência, simplesmente como formas possíveis. Podemos argumentar que a matemática efetivamente existente contempla todas essas possibilidades. Se a geometria euclidiana, por exemplo, estrutura de modo adequado nossa experiência espacial quotidiana, a geometria riemanniana, que choca essa experiência, revela-se no entanto mais adequada para dar conta das relações espaciais de uma outra dimensão da experiência. Parece que, como queria Poincaré, o espaço não tem uma forma determinada a priori, cabendo nesta ou naquela geometria conforma as circunstâncias e conveniências.

Mas Husserl não se restringiu apenas a questões de ontologia e epistemologia da matemática. Ele também legou-nos idéias importantes a respeito da semântica dos enunciados matemáticos, isto é, uma resposta à questão: a que esses enunciados se referem? Para Husserl os enunciados significativos referem-se a estados-de-coisas, mas a esses correspondem, como objetividades pré-categoriais, situações-de-coisas. Essas distinções semânticas, que não podemos analisar detidamente aqui, permitem em particular um tratamento adequado das equivalências lógicas não triviais entre enunciados matemáticos. Esse tratamento é, de certo modo, paralelo, à teoria fregeana da identidade, mas não cabe no âmbito da semântica fregeana.

Até aqui tratamos das contribuições de Husserl ele próprio a alguns problemas centrais da filosofia da matemática. Essas contribuições perpassam toda a sua obra, de PA e as Investigações, mais particularmente, até trabalhos posteriores, como Lógica Formal e Lógica Transcendental, Experiência e Juízo e Crise. Mas ainda resta a questão: podemos extrair da fenomenologia uma metodologia para o tratamento de questões de filosofia da matemática independentemente dessas contribuições?

A fenomenologia transcendental é entendida por Husserl como uma análise da consciência transcendental e suas vivências. Ou, em outras palavras, uma análise da estrutura necessária das experiências de uma consciência pura considerada como tal. Há essencialmente duas dimensões nessa análise, uma centrada nas experiências elas próprias, a dimensão noética; outra, nos conteúdos intencionais dessas experiências, a dimensão noemática. À análise noética interessa o modo como certos conteúdos são experienciados, à análise noemática, o sentido com que esses conteúdos são vivenciados. Esses conteúdos, por sua vez, são quaisquer conteúdos apresentados à consciência, não importa se reais ou ideais, existentes, possíveis, ou meras quimeras. A *époché* nos diz para aceitar o que se apresenta à consciência tal qual se apresenta a ela, sem quaisquer preconceitos.

Ora, nossa experiência matemática nos oferece uma gama variada de objetos, domínios objetivos e conceitos. Também eles podem ser submetidos às análises noética e noemática. Podemos nos perguntar como eles se apresentam a nós (ou melhor, a uma consciência pura ideal) e com que sentido. Podemos analisar fenomenologicamente tanto a estrutura das vivências de consciência com focos objetivos de natureza matemática, quanto a própria essência dos objetos assim vivenciados. Apesar de não ser propriamente uma tarefa matemática, a análise noemática, por exemplo, pode ser um valioso prolegômeno a essa tarefa, fornecendo uma compreensão mais profunda de um conceito ou domínio matemático como um preâmbulo à sua axiomatização. Já a análise noética pode evidentemente oferecer respostas ao problema do acesso em diversos domínios, independentemente do status ontológico que lhes queiramos dar. Problemas da epistemologia da matemática podem também receber um tratamento adequado no contexto da análise fenomenológica. Afinal, essas questões estão intrinsecamente relacionadas ao problema de acesso.

O problema mesmo da aplicação da matemática ao mundo empírico pode ser solucionado pela análise fenomenológica da própria experiência de um mundo empírico. Um mundo como esse, que nos é dado como nos é dado, tem um sentido que pode ser explicitado. Nós o vivenciamos, por exemplo, como um mundo independente, auto-subsistente, atomizável em fatos elementares, descritível pela linguagem, quantificável, e portanto matematizável. O sentido noemático do mundo empírico inclui tudo isso. E se nós o vivenciamos assim, assim ele é para nós em sua essência. Essa análise revela que a aplicação da matemática ao mundo empírico não é um mistério, mas está embutida na nossa idéia mesma de um mundo empírico.

A análise fenomenológica da experiência matemática como preâmbulo à própria atividade matemática não é uma idéia nova, nem recente. Foi posta em prática de modo exemplar por Hermann Weyl num texto clássico de 1918, intitulado *Das Kontinuum*. Ali Weyl desenvolve uma teoria do contínuo matemático sustentada na análise do contínuo da experiência como nos é dado nessa experiência, em conformidade com o mandamento fenomenológico de analisar o sentido e estrutura da experiência exatamente como a vivemos. Weyl se lança numa análise tanto noética quanto noemática da vivência do contínuo para daí extrair uma teoria matemática do contínuo que faça jus a essa vivência.

Numa escala mais modesta, eu mesmo mostrei que os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel podem ser naturalmente fundados na análise da noção de conjunto como uma totalidade que pode, ela própria, pertencer a outra totalidade e que, além disso, depende ontologicamente de seus elementos. Teorias matemáticas podem ser vistas como teorias de conceitos, que estão, como focos de consciência, imersos num emaranhado de significados. A análise fenomenológica pode deslindar esses nós. Assim, antes de submeter esses conceitos a um tratamento puramente matemático que pode não fazer justiça a seus significados, a análise fenomenológica possibilita um tratamento matemático que não distorce o “eidos” dos conceitos matemáticos.

Quis mostrar nesta conferência, em rápidos esboços, como a fenomenologia abre várias possibilidades para a matemática, tanto a sua filosofia, quanto a sua prática. Para isso exibi algumas contribuições do próprio Husserl e de filósofos fenomenologicamente orientados, tanto num campo quanto no outro. Outros exemplo poderiam ser dados, mas creio que o fundamental foi ilustrado.