

## SOBRE A POSSIBILIDADE DA PESQUISA QUALITATIVA EM MATEMÁTICA

José Carlos Cifuentes  
Departamento de Matemática e  
Programa de Pós-graduação em Educação  
Universidade Federal do Paraná  
E-mail: [jccifa@gmail.com](mailto:jccifa@gmail.com)

### Resumo

Partindo da constatação de que o conhecimento científico e o filosófico são complementares na compreensão da realidade, e de que a experiência é ingrediente fundamental na constituição desse conhecimento sobre o mundo, este trabalho tem por finalidade analisar a possibilidade de um conhecimento filosófico na ciência, que segundo Granger só pode ser qualitativo, em especial na matemática. Veremos que, enquanto o conhecimento científico lida com significações, o filosófico lida com sentidos, estando este, por esse motivo, mais do lado da razão poética: subjetiva, interpretativa, valorativa, do que da razão científica: objetiva, universal, neutra. A matemática, nesse contexto, é pensada como uma atividade e, sob esse pressuposto, é estudado o papel da visualização na aquisição do conhecimento matemático e são discutidos diversos aspectos do conhecimento qualitativo em matemática, como os que chamamos de mitos matemáticos.

**Palavras chave:** Conhecimento científico; conhecimento filosófico; matemática; visualização.

*A própria curva, [no barroco] que tanto os perturbava, era por eles desenhada de forma frouxa e desfibrada, não a sentindo, como nós, estruturada, feita com curvas e retas.*

Oscar Niemeyer

### O CONHECIMENTO CIENTÍFICO E O FILOSÓFICO NA COMPREENSÃO DA REALIDADE

Segundo Gilles Gaston Granger, a necessidade do conhecimento filosófico na ciência, que só pode ser qualitativo, nasce da postulação de que há mais na nossa experiência do que o puramente sensível (Granger 1989, p. 30). Para ele, assim como para muitos outros cientistas e pensadores do século XX, dentre eles Poincaré e Einstein, a experiência adquire um significado que ultrapassa o puramente empírico. Vemos, então, que o elemento principal apresentado nesse discurso é pensar a experiência como fator fundamental do conhecimento sobre o mundo.

A filosofia, por um lado, tem um pé na ciência ao compartilhar seu desejo de conceitualização, mas também na experiência, pois, sem deixar de lado seu caráter especulativo e reflexivo, incorpora traços de misticismo. Bertrand Russell, no início de seu ensaio *Misticismo e Lógica*, declara que: “A metafísica, ou a tentativa de conceber o mundo como um todo por meio do pensamento, originou-se e se desenvolveu, desde o início, por causa da união e do conflito de dois impulsos humanos muito diferentes, um induzindo os homens para o misticismo, outro impelindo-os para a ciência” (Russell 1957, p. 9).

A compreensão da realidade na sua unidade exige, então, interpretando as palavras de Russell, a movimentação das duas capacidades essenciais do ser humano, ambas necessárias, como veremos, para a constituição do conhecimento e até da própria realidade: a razão e a emoção, traduzidas no pensamento e a racionalidade a primeira, e na intuição e a sensibilidade a segunda. Ambas têm seu ápice na matemática e na arte respectivamente.

O espírito científico, destacando-se o do século XX onde a matemática entra de forma essencial, foi entendido por Gaston Bachelard nos seguintes termos: “Tornar geométrica a

representação, isto é, delinear os fenômenos e ordenar em série os acontecimentos decisivos de uma experiência, eis a tarefa primordial em que se firma o espírito científico” (Bachelard 1996, p. 7).

Por outro lado, a intuição criadora, de natureza espiritual, uma das manifestações do que poderíamos chamar de espírito místico, é claramente exemplificada por David Bohm como segue: “Newton, por exemplo, ao ver a maçã cair, teve a súbita revelação de que também a Lua caía, chegando assim à idéia da gravitação universal. Essa foi uma percepção imediata de uma relação até então bloqueada” (Bohm *apud* Weber 1986, p. 187). “Se esse mistério diz respeito à intuição do místico ou do cientista, pouco importa; o processo, em si, é que tem valor para Bohm” (Weber 1986, p. 175).

Renée Weber, para quem o misticismo é a experiência de unidade com a realidade, afirma que aquela, a unidade, só pode ser compreendida através de um processo de síntese, processo que escapa dos padrões atuais da ciência cartesiana, a que é pautada pela análise e a fragmentação (Weber 1986, p. 17).

A modernidade cartesiana, que tem seu ápice no positivismo, e o paradigma da cientificidade que ela impõe à ciência moderna, conduziram a uma fragmentação do conhecimento em que perdeu-se o sentido da unidade. Para a sua recuperação, precisa-se fazer a síntese entre o simples e o múltiplo, entre o universal e o particular.

Por exemplo, um tipo de problema sobre a realidade que ainda hoje tem uma componente mística, e está à procura de uma síntese, é a conceitualização do tempo, com destaque para a diferenciação entre o tempo físico e o tempo biológico. Segundo Prigogine, a seta do tempo é uma experiência humana básica (Prigogine *apud* Weber 1986, p. 228), porém ainda não devidamente compreendida. Ela está na base de diversas concepções sobre o que é orgânico: a vida, a evolução, etc. Na história da matemática, o infinito, originalmente ligado a questões religiosas como a eternidade, dentre outras, teve um grande apelo místico desde a antiguidade. Já os gregos, em particular Aristóteles, diferenciaram dois tipos de infinito: o infinito potencial e o infinito atual. O infinito atual, diferentemente do infinito potencial, é um infinito totalizado em sua infinitude, e essa característica quase que paradoxal (infinito, porém acabado) o fez ser suspeito como um conceito bem definido. Na geometria, ele foi aceito pelos gregos apenas como um recurso de simplicidade, pois sem ele não se poderia lidar, por exemplo, com questões de paralelismo entre retas, um dos pontos-chaves da geometria euclidiana (Cifuentes 2003). Esse tipo de infinito só foi incorporado pela matemática no século XIX quando, através da teoria dos conjuntos desenvolvida por Cantor, foi possível medi-lo, de fato uma exigência positivista para sua aceitação.

Conhecimento científico e conhecimento filosófico são complementares na compreensão da realidade, cuja verdadeira complexidade está se manifestando só a partir da segunda metade do século XX que poderíamos chamar de pós-moderna apenas no sentido de se opor à modernidade cartesiana assumindo a complexidade como parte da essência íntima da realidade e não só como ponto de vista acerca desta, e a incerteza como recurso epistemológico para sua compreensão.

Embora deixemos para a seção 2 a discussão de algumas características em paralelo do conhecimento científico e do conhecimento filosófico, podemos adiantar uma de suas principais diferenças. Enquanto que o conhecimento científico, baseado no paradigma de cientificidade positivista, lida com significações, exigindo-se destas: verdade, universalidade, objetividade, racionalidade, a-historicidade e neutralidade, isto é, sem emissão de valores, o conhecimento filosófico, pondo em evidência sua vertente mística, lida também com sentidos, cujas características, atreladas principalmente a discursos e interpretações, estão mais do lado da razão poética que da razão científica. Um velho exemplo, dado por Frege, pode ilustrar o que afirmamos: a palavra ‘Vênus’ significa (ou refere a) o planeta Vênus, enquanto que as expressões “a estrela da manhã” e “a estrela da tarde”, tendo mesma significação têm diferentes sentidos, os que põem de manifesto sua racionalidade poética. Um outro exemplo é o seguinte: dizer “o dia seguinte de ontem” não é apenas mencionar seu significado concreto e verdadeiro, “hoje”, essa expressão vem carregada de sentidos que, muito além da significação, só são compartilhados com a poesia. As metáforas, de uso mais freqüente nas chamadas ciências humanas e sociais, do que nas ciências exatas ou naturais, também tem essa natureza poética. Nilson Machado aborda esse assunto a respeito da matemática: “trata-se de evidenciar que a metáfora, uma figura de retórica que predomina na linguagem poética mas que é

importante, de uma maneira geral, na caracterização do estilo, é um instrumento essencial aos que se dedicam à Matemática, sobretudo ao seu ensino” (Machado 1992, p. 10).

Em fim, consideramos como missão da nossa época pós-moderna re-agrupar os conhecimentos que a ciência moderna tinha fragmentado ao extremo com vistas, não só a uma melhor compreensão da unidade da realidade, senão também a uma unificação do saber, sem perder este sua relevância já alcançada, e visando uma re-significação e novos olhares sobre o que é científico. Veremos na seção 5 que a interdisciplinaridade pode ser um caminho na busca da unidade epistemológica perdida.

### A ABORDAGEM QUALITATIVA NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

À abordagem positivista do conhecimento opõe-se e impõe-se hoje uma abordagem crítica, de caráter qualitativo: no positivismo o método científico define os problemas a serem solucionados, porém, numa abordagem crítica o método é secundário; no positivismo, como consequência do racionalismo cartesiano, sujeito e objeto são independentes, de um ponto de vista crítico eles integram-se no processo de construção do conhecimento; no positivismo os valores do cientista não intervêm (a neutralidade), na abordagem crítica os julgamentos de valor são essenciais na pesquisa e permitem tomar decisões.

O ponto de vista crítico incorpora, então, o qualitativo na construção do conhecimento. Mais ainda, do ponto de vista qualitativo constata-se que, mais importante que a consolidação de uma resposta é a elaboração, como movimento, de uma pergunta, o que Collingwood chama “a atividade interrogante do conhecimento” (Collingwood 1974, p. 38). Para esse autor, não é possível saber o que significa uma proposição a menos que se saiba que pergunta ela pretende responder.

A “atividade interrogante no conhecimento” de Collingwood exige uma nova lógica: a lógica de perguntas e respostas. Ele afirma que “um corpo de saber não consiste em ‘proposições’, ‘enunciados’, ‘juízos’, ou qualquer nome que os lógicos usem para designar atos afirmativos de pensamento [...], senão que consiste em todos estes com as perguntas que se supõe devem responder” (Collingwood 1974, p. 38).

Nessa lógica, para Collingwood, a resposta correta a uma pergunta não é verdadeira, mas justa, o que já implica numa ética ao interior da própria ciência.

O método socrático, característico dos diálogos de Platão, é o protótipo de atividade interrogante, onde põe-se em evidência o caráter contextual das respostas. Um exemplo esclarecedor que Collingwood dá para ilustrar que toda afirmação, nessa lógica, é contextual e que, portanto, não há contradição entre duas afirmações até não saber a que perguntas elas respondem, é o seguinte proveniente da metafísica: “O mundo é ao mesmo tempo uno e múltiplo”.

No método científico, nos padrões positivistas, a formulação de perguntas muitas vezes se traduz na elaboração ou criação de hipóteses ou conjecturas; elas são, na realidade, respostas provisórias, ocultando sua condição mais dinâmica de pergunta. As conjecturas depois devem ser testadas e, nesse processo, entra o método quantitativo da ciência que se baseia em medidas.

No método científico, a palavra ‘método’ refere a regras, e estas são gerais, porém, para se tentar resolver um problema, elas não substituem a imaginação, a intuição e a criatividade do cientista. A formulação de perguntas, ou de problemas, requer destas capacidades do cientista: conceber idéias novas, imaginar hipóteses.

Segundo Borba e Araújo, a pergunta, que um olhar qualitativo nos ajuda a formular, é a síntese de um caminho percorrido com idas e vindas, erros e acertos (Borba e Araújo 2004, p. 27). Parte desse caminho é a criação de situações imaginárias “como resposta à solicitação de situações reais” (Borba e Araújo 2004, p. 34).

Por outro lado, embora já implícito no anterior, a abordagem qualitativa na construção do conhecimento, enquanto crítica, dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura dar sentido aos discursos e narrativas. Necessariamente, uma visão de unidade, como já vimos, deve incluir o questionador na resposta a uma pergunta.

## **I Encontro de Representantes de Grupo de Pesquisa e Estudos Qualitativos**

A pesquisa qualitativa, chamada também de pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos ou narrativas, e depende da relação observador-observado, tanto entre pessoas como entre pessoas e objetos (Borba e Araújo 2004, p. 12).

Vemos, então, que o qualitativo está intimamente ligado à linguagem (à narrativa). De fato, esse termo é comumente usado para expressar propriedades (ou qualidades) não mensuráveis de um objeto: cor, sabor, etc.

Em relação a isso, outra característica importante do pensamento qualitativo é sua condição hermenêutica.

Assim, o objetivo das ciências humanas ou sociais não é explicativo, mas interpretativo, como é o caso da verdade histórica, não podendo descartar, então, os juízos de valor, em particular os juízos estéticos. Exemplos de juízos estéticos em matemática, como vimos na seção 1 ao falarmos sobre a noção de infinito, são os argumentos de simplicidade, embora frequentemente usados como recursos epistemológicos sobre os conceitos envolvidos.

A dimensão interpretativa das ciências humanas é a principal razão que as faz diferentes das ciências exatas e naturais. Uma abordagem qualitativa das ciências exatas exigiria delas esse caráter interpretativo, o que vem corroborado com o pensamento de Weber quem, junto com Bohm e Prigogine, afirma que “No exato instante em que interpretamos o universo, criamos o universo. Por intermédio de nossos pensamentos, mudamos a existência da natureza ... A palavra não apenas reflete o mundo, também cria o mundo” (Weber 1986, p. 39). Essa postura vai ao encontro das idéias de Bachelard declaradamente não-cartesianas: “A ciência suscita um mundo, não mais por um impulso mágico, imanente à realidade, mas antes por um impulso racional, imanente ao espírito. Após ter formado, nos primeiros esforços do espírito científico, uma razão à imagem do mundo, a atividade espiritual da ciência moderna dedica-se a construir um mundo à imagem da razão” (Bachelard 2000, p. 19).

Em decorrência da discussão anterior sobre o conhecimento qualitativo, podemos concluir que a ciência positivista não é a única via para se pensar a experiência.

Como o ideal do conhecimento científico é a objetividade, o problema da confiabilidade do conhecimento resultante de uma abordagem qualitativa é colocado. Mas, a objetividade da ciência não significa necessariamente sua verdade, porém sua possibilidade de crítica e teste, deve ser possível repetir as condições de um fenômeno para re-estudá-lo.

Nós acreditamos possível e realizável a pesquisa qualitativa em ciências exatas, e em especial em matemática, porém devemos distingui-la da pesquisa qualitativa sobre a matemática. O epígrafe deste artigo mostra essa diferença nas palavras de Oscar Niemeyer ao contrapor a arquitetura moderna à arquitetura do barroco (Niemeyer 2005, p. 32).

A respeito dessa possibilidade, temos as seguintes questões: Que tipos de problemas “matemáticos” se resolvem com uma abordagem qualitativa? Ou, que tipo de resultados se espera da pesquisa qualitativa de um problema matemático? Os resultados de uma pesquisa qualitativa em matemática dependem de uma decisão?

Fausto Ongay nos faz reparar que aspectos qualitativos da matemática estão muito ligados aos métodos matemáticos: “Em particular, um dos mais importantes avanços qualitativos ocorridos dentro do estudo dos números, que ao que parece teve lugar dentro da escola pitagórica no século VI a.C., foi quando se começaram a estudar *classes* de números, em contraposição a considerar os números como entes isolados” (Ongay 2000, p. 35).

### **A MATEMÁTICA COMO *POIÉSIS* E A VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Visando, então, a construção do conhecimento nas ciências exatas com um caráter holístico, especialmente na matemática, podemos começar propondo o seguinte: para uma abordagem qualitativa do conhecimento matemático devemos deslocar o foco desta ciência, de ser considerada como corpo sistematizado de conhecimentos a ser considerada como uma forma de pensamento, o pensar matemático. Desse ponto de vista, a matemática é uma atividade, é um movimento, fazer matemática é como fazer filosofia, o filosofar, e por que não, no caso da matemática, o matematizar, tendo então ambas as atividades uma raiz comum.

Pensar a matemática como atividade nos remete a uma das posições mais polêmicas, em inícios do século XX, nos fundamentos desta ciência: o intuicionismo, na versão original de Luitzen Brouwer. Para ele, o conhecimento matemático é uma construção mental baseada na intuição onde, por exemplo, a aceitação da existência de um objeto matemático demanda sua construção, e não a descrição de uma realidade independente, mesmo que abstrata, como no platonismo. A matemática, seguindo a mesma linha de pensamento intuicionista sem, no entanto, nos aderir a ela em sua totalidade, pode ser considerada uma *poiésis*, onde, além da verdade, a “experiência da verdade” (em palavras da professora Rita Schmidt), seria também fonte de conhecimento.

No pensar matemático, na matemática como atividade, devemos destacar evidências, idéias, estratégias, ocorrências na construção/produção do conhecimento. O processo, mais do que o produto.

Diversas visões fenomenológicas nos conduzem a novas perguntas. Na perspectiva fenomenológica Merleau-Pontiana, o conhecimento matemático tem sua “fonte” (palavra que nos leva a pensar que ele flui) na percepção. Do ponto de vista da fenomenologia no sentido Husserliano, coloca-se a pergunta de como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento matemático. Por exemplo, no caso da álgebra manifesta-se um pensar estrutural, e da análise da estrutura do fenômeno emergem constatações que dizem das ações do humano: atividades matemáticas, atos cognitivos, finalidades, etc. (Kluth 2007).

Por outro lado, é de destacar como um exemplo, que uma análise fenomenológica dos números, agora no sentido Kantiano, descobre que eles não tem uma essência ontológica, eles dependem relacionalmente do contexto estrutural onde se encontram: a identidade do número depende do sistema numérico onde se encontra. Na seção 4 discutiremos esse caso de um outro ponto de vista. De fato, uma pergunta básica da perspectiva fenomenológica Kantiana é a seguinte: qual é o modo de ser dos objetos matemáticos. Por exemplo, o modo de ser do número 0,333... é diferente do modo de ser do número  $1/3$ , embora ontologicamente sejam o mesmo.

É possível já apontar diversas questões de natureza qualitativa em matemática, muitas ligadas aos métodos matemáticos como já observado: por exemplo, o discreto x o contínuo, dentre outros. Caracterizar o espaço (respectivamente, a forma) como estando constituído de objetos (respectivamente, partes) ou de relações (respectivamente, estruturas) é uma abordagem qualitativa. Na geometria *a la* Euclides (século III a.C.) adotou-se o primeiro enfoque, enquanto que na geometria *a la* Hilbert (já em finais do século XIX), o segundo.

Os raciocínios por semelhança, por analogia, são típicas formas de um pensamento qualitativo na matemática pensada esta como uma atividade. Só para citar um exemplo: é frequente “visualizar”, e até definir, objetos geométricos em quatro dimensões, digamos um hiper-cubo ou uma hiper-esfera, através de uma passagem do tridimensional a tetradimensional, tomando como modelo, por analogia, a passagem do bidimensional ao tridimensional, isto é, o hiper-cubo é ao cubo como o cubo é ao quadrado.

Também, são exemplos de processos matemáticos de tipo qualitativo os ligados ao uso de imagens através da visualização ou ao uso de recursos tecnológicos. As imagens tem, na realidade, um caráter interpretativo. Segundo Regal e Rick (2007), o desenho espontâneo e livre, ao que acrescentaríamos também o geométrico, é um ato de interpretação, é uma escolha no universo de possibilidade representativas e movimenta a criatividade. Assim, a visualização é um assunto de interpretação, logo qualitativo.

Em contraposição ao conhecimento quantitativo, que está relacionado diretamente ao problema da medida, o conhecimento qualitativo, está relacionado ao problema da forma, à conceitualização da forma, base do pensamento visual.

Para nós, a visualização é uma forma de experiência, sendo uma de suas funções a construção de significados e de sentidos, ela, como vimos, é resultado de uma interpretação. Outra das funções da visualização, por exemplo na resolução de problemas, é ajudar à sua compreensão. Visualizar não é apenas ver o visível, senão, usando as palavras do artista plástico Paul Klee, é principalmente tornar visível.

Visualizar é extrair padrões das representações, é construir o “objeto experienciado”. A visualização e a abstração estão intimamente ligados, e um exemplo dessa relação na matemática, em consonância com a afirmação de Klee, é o seguinte: é possível “ver” (materializado, concretizado) um

triângulo, um quadrilátero, etc., mas é possível visualizar um polígono geral sem necessariamente poder vê-lo concretizado.

### MITOS MATEMÁTICOS

Outros exemplos da abordagem qualitativa em matemática são os que chamaremos de *mitos matemáticos*, os quais não devem ser confundidos com mitos sobre a matemática. Por exemplo, um dos maiores mitos sobre a matemática é a crença, transformada num valor, de que a verdade matemática só se atinge por demonstração. Uma das interpretações do (meta)teorema de incompletude de Gödel diz que existem verdades na matemática que não podem ser demonstradas (aqui devemos entender “verdade matemática” como relativizada a um sistema axiomático). Um outro mito muito generalizado sobre a matemática diz respeito à sua exatidão. Acreditamos que a exatidão em matemática não é essencial para a sua compreensão, possibilitando outras formas de acesso ao conhecimento matemático (Cifuentes 2005).

Facilmente juízos de valor em matemática podem ser transformados em mitos sobre a matemática. Destacamos os seguintes:

a) A matemática é, por natureza, abstrata, imutável, objetiva, não relacionada com a realidade: o valor do “objetivismo”, por exemplo, é o que alimenta a intuição. O objetivismo é dar objetividade (formar objetos) às idéias abstratas.

b) O tribunal da verdade da matemática, como já vimos, é a demonstração, sendo que ela permite concluir e explicar: esse valor está sempre ligado ao padrão de rigor da época e à legitimidade dos procedimentos demonstrativos. Esses procedimentos podem ser ampliados para incluir com legitimidade argumentos de caráter visual, dentre outros.

c) A matemática é completa: este é um dos grandes valores da matemática, defendido principalmente por Hilbert em finais do século XIX. Ele tem o significado, dentre outros, de que todo problema matemático pode ser resolvido, o que pode ser traduzido como que na matemática não há impossibilidades epistemológicas. Outras interpretações dos resultados de Gödel argumentam em contrário.

A ímpeto da completude na matemática também se dá em outros sentidos, mobilizando desenvolvimentos teóricos que ampliam o alcance dessa ciência. Por exemplo, os diversos sistemas de números são muitas vezes ampliados para poder obter algum tipo de completamento. Os números inteiros completam a operação de subtração dos naturais, os números racionais completam a divisão dos inteiros, e assim por diante.

Os mitos podem ter origem quando uma interpretação é transformada em explicação. No seguinte exemplo veremos como os resultados de uma abordagem qualitativa em matemática dependem geralmente de uma tomada de decisão. Um primeiro exemplo de mito matemático historicamente consolidado é o assumir que a estrutura da reta euclidiana é a da reta dos números reais, tomando a sua completude métrica como fator de decisão.

No estudo da análise matemática, hoje, muitas vezes identifica-se “reta euclidiana”, que é um objeto geométrico, com “reta real” que é um objeto algébrico, pois essa área do conhecimento matemático começa com o estudo do corpo ordenado dos números reais. Para tal identificação, supõe-se a reta euclidiana constituída de pontos (entidades inextensas) e associa-se a cada número real um único ponto da reta de modo que essa associação é demonstrada completa, no sentido que é biunívoca, isto é, que a cada ponto da reta também lhe corresponde um único número real, sendo uma consequência de essa associação a crença de que todo segmento de reta é mensurável por um número real positivo.

Dizemos, nesse caso, que a reta euclidiana tem a estrutura dos números reais. Podemos entender essa “estrutura” como uma roupagem algébrica que a reta veste para que suas propriedades (geométricas) sejam “inteligíveis” pela mente humana.

Por outro lado, na história da matemática há diversos períodos em que a reta euclidiana vestiu-se de uma outra roupagem envolvendo a noção de ‘infinitésimo’, destacando-se a época de Arquimedes e os inícios do “cálculo infinitesimal” no século XVII.

Na história da matemática, notadamente no século XIX, os números infinitesimais foram banidos dessa ciência em decorrência do processo de rigorização da matemática chamado de “aritimetização da análise”, fundando-se, então, a análise matemática na teoria dos números reais e chamando-se, a partir de então, de *análise clássica*.

Em meados do século XX, após diversos desenvolvimentos da lógica matemática, especialmente da teoria de modelos, os números infinitesimais foram re-introduzidos na matemática como parte estruturante do corpo ordenado dos chamados números hiper-reais, corpo que estende o dos números reais supostamente completo, sobre o qual é construída a chamada de *análise não-standard*.

Afinal, qual é a estrutura da reta euclidiana, a dos números reais ou a dos números hiper-reais, ou é alguma outra? E, quê significa a completude do sistema dos números reais nesse contexto?

De fato, essa completude baseia-se num princípio, o de Arquimedes (ou de Eudoxo, que afirma que dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo inteiro do menor que supera o maior), e a adoção dele é uma opção da matemática, podendo significar uma limitação da mente humana para “perceber”, para “experienciar”, variações mais finas do que os números reais nos permitem. De fato, os números hiper-reais nos permitiriam medir essas variações mais finas, mais ainda, “mais” segmentos da reta poderiam ser medidos com esses números.

Uma ilustração do que estamos discutindo é a seguinte. O fato da sequência  $1/n$  tender a 0 é equivalente ao Princípio de Arquimedes, e esse fato usa-se, por exemplo, para “aproximar” a circunferência por uma sequência infinita de polígonos inscritos. Ora, do ponto de vista da intuição geométrica, como é possível entender a circunferência, que tem uma quantidade não-enumerável de pontos, como o limite de uma sequência de polígonos inscritos, cujos vértices tenderão a no máximo uma quantidade enumerável de pontos? Essa suposta aproximação permite concluir que qualquer defeito de áreas entre a circunferência e os polígonos tende a zero e, portanto, que a área da circunferência é o limite das áreas dos polígonos. É um salto que só o princípio de Arquimedes pode “explicar”.

A dialética real/hiper-real (não com esse nome) é muito antiga e tem seus inícios nos paradoxos de Zenão, os quais baseiam-se no conflito entre diversas concepções de mundo. Esses paradoxos não foram ainda resolvidos e a lógica matemática moderna talvez forneça argumentos para mostrar que jamais serão resolvidos adequadamente.

Um reflexo dessa situação é dada no contexto da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, considerada o fundamento da matemática moderna, na chamada *Hipótese do Contínuo*. Essa hipótese ou conjectura afirma que os diversos subconjuntos infinitos de números reais só podem ter cardinalidade enumerável ou a do contínuo, isto é, a do próprio conjunto dos números reais. Foi provado, na década de 1960, que essa hipótese é independente dos demais axiomas da teoria dos conjuntos e, portanto, o fato de existirem ou não subconjuntos com outras cardinalidades é indecidível. Isto pode ser entendido como que não podemos conhecer a verdadeira estrutura da reta euclidiana, isto é, há uma real impossibilidade epistemológica na matemática.

Um outro exemplo de mito matemático é a convicção de que  $\pi$  é um número. Na realidade,  $\pi$  é um conceito qualitativo, o quociente constante do comprimento de qualquer circunferência ao seu diâmetro. Se mudarmos a forma de medir comprimentos (a noção de espaço métrico está por trás), o valor numérico de  $\pi$  pode mudar, mas não sua conceitualização. Por exemplo, tomando a “métrica soma” no plano cartesiano, dada por  $d(P, Q) = |x - z| + |y - w|$  para  $P = (x, y)$  e  $Q = (z, w)$ , temos que o valor de  $\pi$ , nesse caso, é 4 (!), e não 3,14159... como no caso pitagórico-euclidiano (Cifuentes, Musial e Costa 2007). Os mitos matemáticos, próprios de um pensamento qualitativo, fazem parte do próprio conhecimento matemático.

Em relação com o exemplo anterior, um outro mito matemático foi apontado por Granger (1974), embora não o identificasse como mito: considerar a “característica de Euler” como um número. A *característica de Euler*, de uma superfície bidimensional por exemplo, é um outro conceito qualitativo que tem uma expressão numérica dependente da superfície em que se aplica, ela significa  $V - A + F$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces de qualquer triangulação da superfície (esse valor é constante dependendo só da superfície e não da triangulação; por exemplo, no caso da esfera esse valor é 2 ao igual que em qualquer poliedro convexo). Esse

conceito qualitativo (assim como muitos de caráter topológico em matemática) reflete o *situs* leibniziano (relativo à forma), em contraposição à grandeza galileana (relativa ao conteúdo). Esse mito matemático põe em evidência um outro sobre a matemática, a saber: o número sempre expressa propriedades quantitativas.

Vários outros mitos matemáticos podem ser listados.

1. Os objetos matemáticos, especialmente os “números”, tem um significado de por si, independente do contexto. No pensamento matemático moderno, no espírito matemático do século XX como diria Bachelard, o número 2, por exemplo, só tem uma identidade enquanto pertencente a um certo sistema numérico: em **Z** (o sistema dos números inteiros) ele é primo, enquanto que em **R** ou **C** (os sistemas dos números reais e complexos respectivamente) ele não é, pois admite a seguinte fatoração não trivial,  $2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$  em **R**, ou  $2 = (1 + i)(1 - i)$  em **C**. Essa discussão permitiria responder negativamente à pergunta de se **Z** está contido em **R** (ou em **C**).

2. A igualdade em matemática é muitas vezes pensada como identidade. Por exemplo,  $0,999... = 1$  ou  $1/3 = 2/6$ . Os membros de cada uma dessas igualdades têm diferentes sentidos dados pelos processos subjacentes, os resultados desses processos é que são iguais, mas não os próprios processos. No segundo caso poderíamos, e talvez deveríamos, chamar de frações os processos correspondentes, enquanto que reservariamos a denominação de ‘número racional’ para os resultados desses processos.

3. As funções têm um caráter conjuntista. Esse mito matemático baseia-se no seguinte mito sobre a matemática: a matemática, como um todo, é de natureza extensional. É um pressuposto, principalmente no ensino, que a matemática toda pode ser fundamentada, ou construída, na teoria dos conjuntos. Essa, de fato, foi uma das propostas de finais do século XIX para a reconstrução da matemática, consequência do processo de aritmetização da análise, que originaram o que se conhece como a crise dos fundamentos. Outras propostas como a teoria de categorias, em meados do século XX, foram desenvolvidas e ainda suas capacidades não foram esgotadas. Por outro lado, aspectos intensionais da matemática, como o conceito de “parte (orgânica)” de um conjunto, num sentido mereológico (os subconjuntos usuais são de caráter extensional), ainda não foram explorados. Aliás, a própria idéia de “função” carrega um aspecto dinâmico que sua versão conjuntista-extensional não captura.

### CONCLUSÃO: A EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E A INTERDISCIPLINARIDADE

Baseados na discussão precedente, adotaremos como princípio educacional o seguinte: a Educação não deve visar apenas o desenvolvimento das capacidades do ser humano ligadas à inteligência, senão também a formação do caráter. Esse princípio conduz, naturalmente, a diversas consequências para a educação científica, e para a educação matemática em particular. Passar do conhecimento científico à educação científica é passar do conceito ao ato, o ato gerador de conhecimentos.

Um outro princípio, esta vez epistemológico, devemos também assumir: do ponto de vista da procura da unidade, a ciência não apenas consiste de princípios e leis senão também de valores, e é missão da educação científica abordá-los.

Toda visão de mundo, além de ser um conhecimento sobre ele, é também uma atitude diante dele. Nesse sentido, a educação científica deve incorporar mecanismos para promover essa atitude. A interdisciplinaridade, quando bem entendida, é uma possibilidade.

A interdisciplinaridade é uma resposta à fragmentação positivista do conhecimento (Japiassu 1976), procurando restabelecer o diálogo, não apenas a integração, entre suas diversas áreas. Ela tornou-se, neste início do século XXI, uma necessidade epistemológica, proveniente do reconhecimento da complexidade pós-moderna, opondo-se à simplicidade cartesiana.

A interdisciplinaridade também pode ser considerada uma tendência romântica à superação dos limites fronteiriços entre os domínios do saber. É uma vontade de poetizar toda disciplina, valorizando em todos os âmbitos as capacidades cognitivas da poesia, por exemplo através do uso de metáforas, especialmente na matemática.



## I Encontro de Representantes de Grupo de Pesquisa e Estudos Qualitativos

A interdisciplinaridade tem muitos pontos em comum com a abordagem qualitativa da ciência. Por exemplo, a possibilidade, na conjugação de várias áreas, de respostas múltiplas às perguntas formuladas.

A ruptura de fronteiras entre as disciplinas implica também no desaparecimento de barreiras na comunicação, é necessário ampliar a linguagem para incorporar novos conceitos, métodos, modelos, etc.

Mas, por sua própria natureza, a própria interdisciplinaridade não está sujeita a uma definição. Os empreendimentos interdisciplinares não visam a constituição de novas disciplinas, embora o processo natural conduza a elas. De fato, novas disciplinas como a biofísica, a etno-matemática ou a psico-pedagogia, como muitas outras, nasceram como empreendimentos interdisciplinares.

A matemática e a arte, como vimos na seção 1, são a expressão mais elevada do espírito científico e do espírito místico respectivamente, portanto, a relação entre elas é o protótipo de relação interdisciplinar. A própria educação científica é um empreendimento interdisciplinar.

### REFERÊNCIAS

- BACHELARD, G. **A Formação do Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996 (original de 1938).
- \_\_\_\_\_. **O Novo Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000 (original de 1934).
- BORBA, M. e ARAÚJO, J. de L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.
- CIFUENTES, J. C.. *Fundamentos Estéticos da Matemática: Da Habilidade à Sensibilidade*. In: **Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento** (Bicudo, M. A. V. Org.). Brasília: Plano Editora, 2003, pp. 59-79.
- \_\_\_\_\_. *Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático*. Boletim do GEPEM, vol. 46, Rio de Janeiro: USU, 2005, pp. 55-72.
- CIFUENTES, J. C. ; MUSIAL, J. e COSTA, D.. *A Geometria Dinâmica como Ferramenta de Estudo na Teoria dos Espaços Normados*. Proc. of VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. Curitiba, 2007, 6 pp.
- COLLINGWOOD, R. G. *Pregunta y Respuesta*. In: **Autobiografía** (Capítulo V). México: Fondo de Cultura Económica 1974 (original de 1939), pp. 37-50.
- GRANGER, G. G.. **Filosofia do Estilo**. São Paulo: Editora Perspectiva, 1974.
- \_\_\_\_\_. **Por um Conhecimento Filosófico**. Campinas, SP: Papirus Editora, 1989.
- JAPIASSU, H.. **Interdisciplinaridade e Patologia do Saber**. Rio de Janeiro: Imago Editora, 1976.
- KLUTH, V. S.. *O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma Visada Fenomenológica*. Bolema, ano 20, no. 28, 2007, pp. 95-112.
- MACHADO, N.. **Matemática e Educação: Alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez Editora, 1992.
- NIEMEYER, O.. **A Forma na Arquitetura**. Rio de Janeiro: Editora Revan, 2005.
- ONGAY, F.. **Máthema: El Arte del Conocimiento**. Colección "La Ciencia para Todos". México: Fondo de Cultura Económica, 2000.
- REGAL, P. H. e RICK, G. A.. *Desenho e Re-significação*. In: Proceedings of VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. Curitiba, 2007, 10 pp.
- RUSSELL, B.. *Misticismo e Lógica*. In: **Misticismo e Lógica** (Capítulo I). São Paulo: Comp. Editora Nacional, 1957, pp. 9-41.
- WEBER, R.. **Diálogos com Cientistas e Sábios: A Busca da Unidade**. São Paulo: Círculo do Livro, 1986.